YÜZEYLER TEORİSİ FİNAL SINAV SORULARI (24.01.2021)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) a) E^n deki bir M hiper yüzeyinin Ortalama eğrilik fonksiyonunu ve Ortalama eğriliğini tanımlayınız**(5 P.)**.

b) E^n de bir hiperyüzey M ve P noktasındaki ortalama eğriliği $H(P)$ olsun. $H(P)$ nin $T_M(P)$ deki baz seçiminden bağımsız olduğunu gösteriniz**(15 P.)**.

2.) E^3 de M, denklemi $x_1^2 + x_2^2 = 1$ olan silindir ve M üzerindeki α eğrisi de $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha : I \to M,\ \alpha(t) = (\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ ct+b)$$

ile verilmiş olsun. α eğrisinin silindir üzerinde bir geodezik olup olmadığını araştırınız **(20P.)**.

3.) E^3 de $M = S^2$ yüzeyinin temel formlarını bulunuz(**(20P.)**.

4.) $M_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 x_3 - 1 = 0\} \subset E^3$, $M_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 x_3 = 0\} \subset E^3$ yüzeylerinin $Q = (1, ?, ?)$ noktasında hangi açı altında kesiştiklerini bulunuz**(20P.)**.

5.) E^3 te bir hiperyüzey M olsun. M üzerinde temel formlar, sırasıyla; I, II, III ve Gauss eğrilik fonksiyonu K, ortalama eğrilik fonksiyonu H olmak üzere $III - H.II + K.I \equiv 0$ olduğunu gösteriniz**(20P.)**.

NOT: Sorular eşit puanlı olup, süre 120 dakikadır. Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

C-1) a) M, E^n de bir hiperyüzey; S, M nin şekil operatörü olsun.

$$H : M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow H(P) = iz(S(P))$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna M nin ortalama eğrilik fonksiyonu, H(P) değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir.

b) $T_M(P)$ de birbirinden farklı iki baz Φ ve ψ olsun.

$$S : T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$$

lineer dönüşümünün bu iki baza göre matrisleri, sırası ile, S_Φ ve S_ψ olsun. Bu taktirde,

$S_\psi = Q \cdot S_\Phi \cdot Q^{-1}$ olacak şekilde en az bir Q regüler matrisi vardır.

$$iz(S_\psi) = iz(Q \cdot S_\Phi \cdot Q^{-1}) = iz(Q\,\overbrace{(S_\Phi Q^{-1})}^{K})$$

yazılabilir. $iz(AB) = iz(BA)$ olduğundan

$$iz(S_\psi) = iz((S_\Phi Q^{-1})Q) = iz(S_\Phi (Q^{-1} \cdot Q))$$

$\Rightarrow$ $iz(S_\psi) = iz(S_\Phi)$ elde edilir.

O halde, H nın $P \in M$ deki değeri $T_M(P)$ deki baz seçiminden bağımsızdır.

C-2) $\alpha'(t) = (-a\sin(at+b),\ a\cos(at+b),\ c)$

$\alpha''(t) = (-a^2\cos(at+b),\ -a^2\sin(at+b),\ 0)$

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$

$$\Rightarrow N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{\cancel{2}(x_1, x_2, 0)}{\cancel{2}\sqrt{\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{1}}}$$

$$\Rightarrow N = (x_1, x_2, 0).$$

$$\Rightarrow N\Big|_{\alpha(t)} = (\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ 0).$$

Buna göre; $\alpha''(t) = -a^2 N\Big|_{\alpha(t)}$ olduğundan $\alpha''(t) \perp T_M(\alpha(t))$.

O halde α eğrisi silindir üzerinde geodezik bir eğridir.

C-3) Önce yüzeyin şekil operatörünü bulalım:

$M = S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=r^2\}$ yüzeyi E^3 de O merkezli r yarıçaplı küredir.

Yüzeyin tanımında kullanılan fonksiyon,

$$f: E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r^2=0$$

olduğundan, $\vec{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$ yüzeyin normalidir.

$\| \vec{\nabla f} \| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2r$ olduğundan, yüzeyin birim normali

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \left(\frac{1}{r}x, \frac{1}{r}y, \frac{1}{r}z\right).$$

$$S(X) = D_X N = \left(X[\tfrac{1}{r}x], X[\tfrac{1}{r}y], X[\tfrac{1}{r}z]\right).$$

$\vec{V_P}[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P$ olduğunu Dif. Geo. I den biliyoruz.

$X = (x_1, x_2, x_3)$ olsun.

$$X[\tfrac{1}{r}x] = \langle X, \nabla(\tfrac{1}{r}x)\rangle = \langle (x_1,x_2,x_3), (\tfrac{1}{r}, 0, 0)\rangle = \tfrac{1}{r}x_1,$$
$$X[\tfrac{1}{r}y] = \langle X, \nabla(\tfrac{1}{r}y)\rangle = \langle (x_1,x_2,x_3), (0, \tfrac{1}{r}, 0)\rangle = \tfrac{1}{r}x_2,$$
$$X[\tfrac{1}{r}z] = \tfrac{1}{r}X[z] = \tfrac{1}{r}\langle (x_1,x_2,x_3), (0,0,1)\rangle = \tfrac{1}{r}x_3.$$

$$\Rightarrow S(X) = \left(\tfrac{1}{r}x_1, \tfrac{1}{r}x_2, \tfrac{1}{r}x_3\right) = \tfrac{1}{r}(x_1,x_2,x_3) = \tfrac{1}{r}X.$$

S şekil operatörünün matrisi $\mathcal{S}$ olmak üzere,

$$S(X) = \mathcal{S}X = \tfrac{1}{r}X = \tfrac{1}{r}I(X)$$

$\Rightarrow \mathcal{S} = \frac{1}{r}I_2$ dir. Dolayısıyla,

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece,

1. temel form : $I(X,Y) = \langle X, Y\rangle$,

2. temel form: $II(X,Y) = \langle S(X), Y\rangle = \frac{1}{r}\langle X,Y\rangle$,

3. temel form: $III(X,Y) = \langle S^2(X), Y\rangle = \langle S(X), S(Y)\rangle = \frac{1}{r^2}\langle X,Y\rangle$

bulunur.

Soru 4. $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid x_1 x_3 - 1 = 0\} \subset E^3$,

$$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid x_1 - x_2 x_3 = 0\} \subset E^3$$

yüzeylerinin $P = (1, ?, ?)$ noktasında hangi açı altında kesiştiğini araştırınız.

Çözüm:

$$f : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_3 - 1$$

ve

$$g : M_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow g(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 \cdot x_3$$

$x_1 = 1$ için $x_1 \cdot x_3 - 1 = 0$ dan $x_3 = 1$ ve $x_1 - x_2 \cdot x_3 = 0$ dan $x_2 = 1$ bulunur. O halde $P = (1, 1, 1)$ dir.

$$\nabla f = (x_3, 0, x_1) \Rightarrow \nabla f|_P = (1, 0, 1),$$
$$\nabla g = (1, -x_3, -x_2) \Rightarrow \nabla g|_P = (1, -1, -1)$$

olur. Buradan,

$$\|\nabla f|_P\| = \sqrt{2} \text{ ve } \|\nabla g|_P\| = \sqrt{3} \text{ elde edilir.}$$

M_1 ve M_2 yüzeylerinin P noktasındaki normalleri arasındaki açı θ ise

$$\cos\theta = \frac{\langle \nabla f|_P, \nabla g|_P \rangle}{\|\nabla f|_P\| \cdot \|\nabla g|_P\|} = \frac{\langle (1,0,1), (1,-1,-1) \rangle}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

bulunur. O halde M_1 ve M_2 yüzeyleri P noktasında birbirine diktir.

Soru 5: E^3 ün bir hiperyüzeyi M olsun. M üzerinde temel formlar, sırasıyla; I, II, III ve Gauss eğrilik fonksiyonu K, ortalama eğrilik fonksiyonu H olmak üzere,

$$III - H.II + K.I = 0$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $n=3$ olduğundan $\text{Boy}\, M = \text{Boy}\, T_M(P) = \text{Boy}\, \chi(M) = 2$ dir. O halde,

$$S: T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$$

şekil operatörünün karakteristik polinomu ikinci derecedendir. Eğer k_1 ve k_2 asli eğrilikler ve X_1 ve X_2 de bu asli eğriliklere karşılık gelen asli doğrultular ise $S(X_1) = k_1 X_1$, $S(X_2) = k_2 X_2$ yazılabileceğinden

$$S\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

dır. O halde, $\Phi = \{X_1, X_2\}$ bazına göre S şekil operatörüne karşılık gelen matrisi

$$S_{\Phi} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde alabiliriz. S nin karakteristik polinomu

$$P_{S_\Phi}(\lambda) = |\lambda I_2 - S_\Phi| = \lambda^2 - \lambda(k_1+k_2) + k_1.k_2$$

bulunur. Cayley-Hamilton Teoreminden (her kare matris kendi karakteristik polinomunun bir köküdür) $P_S(S) = 0$ dır. Böylece,

$$S^2 - (k_1+k_2)S + (k_1.k_2)I_2 = 0$$

yazılabilir. Diğer taraftan, $\forall X_P \in T_M(P)$ için

$$[S^2 - (k_1+k_2)S + (k_1.k_2)I_2](X_P) = 0(X_P) = 0$$ ve $\forall Y_P \in T_M(P)$

için, eşitliği iç-çarpıma tabi tutarsak

$$\langle S^2(X_P), Y_P\rangle - (k_1+k_2)\langle S(X_P), Y_P\rangle + (k_1.k_2)\langle \underbrace{I(X_P)}_{S^0(X_P)}, X_P\rangle = 0$$

yazılabilir. Bu ise

$$III(X_P, Y_P) - \underbrace{(k_1+k_2)}_{H} II(X_P, Y_P) + \underbrace{k_1.k_2}_{K} I(X_P, Y_P) = 0(X_P, Y_P)$$

$\Rightarrow III - H.II + K.I = 0$ elde edilir.